1-2

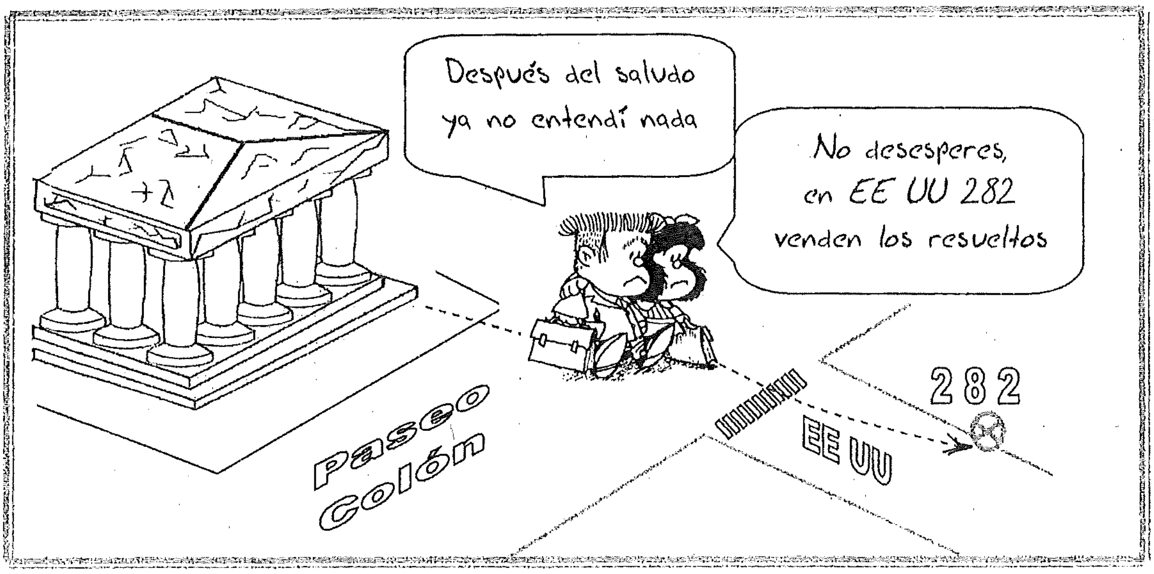
Ejercicios Resueltos

Física I

Guía 1: Leyes del Movimiento (1^{ra} Parte)

Ejercicio 21 al 35

- Dinámica: leyes de Newton - Sistemas No inerciales - Problemas con aceleración variable - Movimento oscilatorio armónico simple -



Para contactarte con nosotros, escribinos a

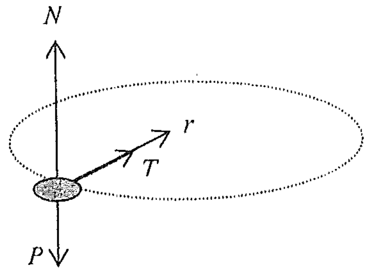
resueltoscbc@gmail.com

Guía 1: Leyes del Movimiento (2^{da} Parte)

Índice

21. Una piedra de 0,9 *kg* se ata a una cuerda de 0,8 *m*. La cuerda se rompe si su tensión excede los 500 N (ésta es la *resistencia de ruptura* de la cuerda). La piedra gira en un círculo horizontal sobre una mesa sin rozamiento; el otro extremo de la cuerda está fijo. Calcular la máxima rapidez que puede alcanzar la piedra sin romper la cuerda.

Hacemos un esquema donde mostramos las fuerzas aplicadas al cuerpo: la tensión de la soga (que apunta hacia el centro de giro) la Normal de la mesa que sirve de apoyo y el Peso. Para escribir las ecuaciones recordemos que estos movimientos son acelerados, y que si el giro es uniforme está aceleración es la a_c, que apunta hacia el centro de giro (dirección radial)



Por este motivo conviene tomar un eje en dirección radial y sentido hacia el centro; nos evita descomponer la aceleración:

$$r)\ T = m.a_c \qquad y)\ N - P = 0$$

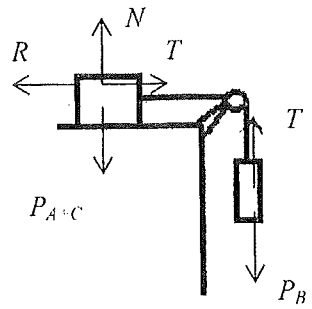
Ahora usamos la máxima Tensión permitida a la cuerda (500 N), y la fórmula: $a_c = \dfrac{v^2}{R}$

$$r)\ 500\,\mathrm{N} = 0{,}9\ kg.\frac{v^2}{0{,}8\,m} \xrightarrow{despejo} v = \sqrt{444{,}\widehat{4}} \approx 21{,}1\ \tfrac{m}{s}$$

Esta es la máxima rapidez, si aumentara v, aumentaría la Tensión, y la cuerda se rompe.

22. Las masas de A y B son 10 y 5 kg respectivamente. El coeficiente de fricción de A con la mesa es de 0,2. (a) Hallar la masa mínima de C que evitará que A se mueva. (b) Calcule la aceleración del sistema si se retira C. (c) Hallar la velocidad relativa de A respecto de B después de 0,5 s de retirado el cuerpo C. (d) ¿qué coeficiente de rozamiento es necesario entre el cuerpo A y C para que los cuerpos de la situación (a) permanezcan en equilibrio si la soga está sujeta a C en vez de a A? ¿Qué pasaría si existiese el mismo coeficiente de roce que entre A y la mesa?

Atención: ante la ausencia de otros comentarios, vamos a suponer que el coeficiente de fricción que nos da el enunciado es el del caso estático y dinámico.



(a) Para empezar a resolver el problema, consideremos a los cuerpos A y C como un conjunto de masa total desconocida.

Planteo la 2^{da} ley para cada cuerpo, tomando el "sistema solidario" de ejes:

$$M_{A+C}: \begin{cases} x) T - R_{AC} = M_T.a \\ y)\ N - P_T = 0 \end{cases} \qquad M_B:\ x) M_B.g - T = M_B.a$$

Para el conjunto "A+C", despejamos de la ecuación del eje "y": $N = P_T = M_T.g$

Ahora ponemos que el sistema no debe moverse ($a = 0$), como se pide en la primera parte, y sumamos miembro a miembro las ecuaciones en los ejes de movimiento:

$$M_B.g - R_{AC} = 0 \ \rightarrow\ M_B.\cancel{g} = \mu.N = \mu.M_{AC}.\cancel{g} \ \rightarrow\ M_{AC} = \frac{M_B}{\mu} = \frac{5\ kg}{0,2} \approx 25\ kg$$

Como A tiene 10 kg, se deduce que C tiene entonces una masa de por lo menos 15 kg.

b) si retiramos el cuerpo C, el sistema se desequilibra. Cambian por lo tanto varias cosas: empieza a haber aceleración, la fuerza de rozamiento es dinámica, la Normal del conjunto será ahora menor, porque equilibra al peso del A. Las ecuaciones son:

$$M_A: \begin{cases} x) T - R_A = M_A.a \\ y)\ N - P_A = 0 \end{cases} \qquad M_B:\ x)\quad M_B.g - T = M_B.a$$

Despejamos: $N = P_A = M_A.g = 98$ N. Sumando las ecuaciones de los ejes x)

0,1

$$P_B - R_A = (M_A + M_B).a \ \rightarrow\ 49\,\text{N} - 0,2.98\,\text{N} = 15\ kg.a \ \xrightarrow{despejo}\ a = 1,96\,\tfrac{m}{s^2}$$

(c) primero calculamos la velocidad de ambos cuerpos respecto a Tierra. Como parten del reposo, y su aceleración es la calculada en (b), tenemos de la ecuación del MRUV:

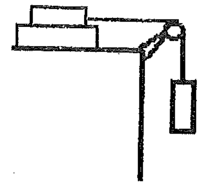
$$v = v_0 + a.t = 1,96.\ 0,5 = 0,98\,\tfrac{m}{s}$$

Pero esta cuenta me da el módulo de la velocidad. Vectorialmente debo poner:

$$\vec{v}_{A,T} = 0,98\,\tfrac{m}{s}\ \hat{i} \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_{B,T} = -0,98\,\tfrac{m}{s}\ \hat{j}$$

Uso las reglas de Galileo: $\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_{A,T} + \vec{v}_{T,B} = \vec{v}_{A,T} - \vec{v}_{B,T} = 0,98\,\tfrac{m}{s}\ \hat{i} + 0,98\,\tfrac{m}{s}\ \hat{j}$

(d) En el caso de ubicarse el cuerpo C arriba, como mostramos en la figura, puede llegar a ocurrir que el C deslice respecto del A. Planteo el problema, considerando al C por separado del A.



Tenemos para el C: $\begin{cases} x)\ T - R = M_C.a \\ y)\ N = P_C \end{cases}$

Mientras que para el B: $x)\ P_B - T = M_B.\ A$

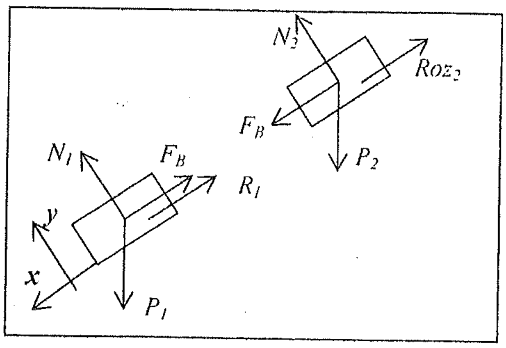
Planteamos la situación de equilibrio ($a = 0$) y sumo las ecuaciones de los ejes x

$$M_B.g - R_C = 0 \ \rightarrow\ \mu = \frac{M_B.g}{N_C} = \frac{5kg\ .\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}}{15kg\ .\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}} \approx 0{,}33$$

Este sería el mínimo coeficiente necesario para que se mantuviera también el equilibrio de esta manera. Si el coeficiente entre A y C fuera también de 0,2 , entonces el equilibrio resultaría imposible, y el cuerpo C saldría acelerado hacia adelante y el B hacia abajo. En cambio, el A permanecería en reposo.

23. Dos bloques, que pesan 8 kg y 80 kg respectivamente, están unidos por una barra y deslizan hacia abajo sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque de menos masa y el plano es de 0,25 y el correspondiente al otro bloque es de 0,5. (a) Calcúlese la aceleración y la tensión en la barra. ¿La barra está comprimida o traccionada? ¿Depende el resultado de la ubicación relativa de los bloques? (b) ¿Cuál sería la aceleración y la tensión en la barra si los bloques se intercambian los coeficientes de rozamiento? (c) Recalcule suponiendo ambos coeficientes iguales a 0,25.

Hagamos un esquema de la situación, poniendo al más liviano del lado de abajo. Como vemos, los pesos de ambos cuerpos deberemos descomponerlos, como hacemos siempre en los planos inclinados. La fuerza que llamé "R_1" es el rozamiento que recibe el primer cuerpo. Las ecuaciones de Newton, para el sistema de ejes que se eligió en el dibujo son:



$$m_1:\ \begin{cases} x)\ P_{1,x} - R_1 - F_B = m_1.a \\ y)\ N_1 - P_{1,y} = 0 \end{cases} \qquad m_2:\ \begin{cases} x)\ P_{2,x} - R_2 + F_B = m_2.a \\ y)\ N_2 - P_{2,y} = 0 \end{cases}$$

Donde las componentes del peso en el plano inclinado para cada cuerpo se sacan con las expresiones de siempre: $P_x = m.g.sen(\alpha)$; $P_y = m.g.\cos(\alpha)$. En cuanto a las dos fuerzas de rozamiento, como se trata de la situación dinámica, debemos usar $Roz = \mu_d.N$

Para resolver este sistema, despejo de las ecuaciones del eje "y" a las dos normales:

$$N_1 = P_{1,y} = M_1.g.\cos(30) \cong 67{,}9\ \mathrm{N} \qquad \text{y} \qquad N_2 = P_{2,y} = M_2.g.\cos(30) \approx 679\ \mathrm{N}$$

Reemplazo en las ecuaciones del eje "x" los dos rozamientos:

Sumo miembro a miembro

$$x)\ P_{1,x} - \mu_1.N_1 - F_B = m_1.a$$
$$x)\ P_{2,x} - \mu_1.N_1 + F_B = m_2.a$$

$$P_{1,x} + P_{2,x} - \mu_1.N_1 - \mu_2.N_2 = (m_1 + m_2).a \xrightarrow{despejo} a = \frac{P_{1,x} + P_{2,x} - \mu_1.N_1 - \mu_2.N_2}{m_1 + m_2}$$

Reemplazo los datos:

0,25.

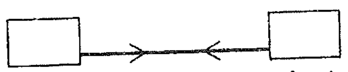
$$a = \frac{8\ kg.9{,}8\frac{m}{s^2}.0{,}5 + 80\ kg.9{,}8\frac{m}{s^2}.0{,}5 - 0{,}25.67{,}9\,N - 0{,}5.679\,N}{88\ kg} \approx 0{,}85\ \frac{m}{s^2}$$

Reemplazo en cualquiera de las ecuaciones del eje "x":

$$x)\ P_{2,x} - \mu_2.N_2 + F_B = m_2.a \xrightarrow{despejo} F_B = m_2.a - P_{2,x} + \mu_2.N_2 \approx 15{,}4\ \mathrm{N}$$

Este resultado merece alguna reflexión. Nosotros supusimos el sentido de las fuerzas que aplica la barra igual que si hubiera sido una soga, es decir tirando de los cuerpos hacia ella. Pero esto podría no haber sido así. La barra puede recibir fuerzas de tracción o compresión, las sogas sólo de tracción. Quizás un dibujo ayude a entender:

Tracción



La soga sólo puede tironear hacia ella misma, no se puede comprimir

Compresión

La barra puede empujar los cuerpos hacia fuera si estos la comprimen

Las fuerzas dibujadas son las reacciones recibidas por los cuerpos. En el primer caso, cuando se intenta estirar la soga (o la barra) reacciona tironeando de los cuerpos hacia ella. En el segundo, cuando se la intenta comprimir, reacciona empujando hacia fuera. A la soga esto le resulta imposible, porque cuando se la comprime, se flexiona sin ejercer resistencia. La pregunta es ¿nuestra barra está siendo comprimida o traccionada? La respuesta es: nosotros dibujamos el sentido de las fuerzas que realiza la barra como si ésta estuviera traccionada como una soga, y el resultado de las cuentas confirmó estos sentidos que dibujamos, porque la respuesta fue ***positiva***. De haber dado un signo negativo, significaría que la barra estaría haciendo una fuerza del valor de la respuesta, pero de sentido contrario al dibujado. Resumiendo: el planteo en el caso de la barra es como el de la soga, dibujamos la fuerza como una tensión, y la despejamos de las ecuaciones.

Info: resueltoscbc@gmail.com

Si el signo es negativo, significa que en lugar de estar traccionada como la soga, está siendo comprimida. Pero el resultado obtenido es el módulo de la fuerza (no hay que plantear nuevamente el problema).

La respuesta a eso tiene que ver con la tendencia a caer de cada cuerpo por separado, y su ubicación relativa. Si el que tiene tendencia a caer más rápido está abajo, entonces la barra estará traccionada (debe impedir que el de abajo se aleje del de arriba). En caso contrario, si el de abajo tiene tendencia a caer más lento, la barra será comprimida. El factor que decide quien cae naturalmente más rápido es el coeficiente "μ", como veremos en el caso (b). Rehago las cuentas intercambiando los valores de μ_1 y μ_2:

$$a = \frac{P_{1,x} + P_{2,x} - \mu_1.N_1 - \mu_2.N_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{78,4\,\text{N}.0,5 + 784\,\text{N}\,.0,5 - 0,5.67,9\,\text{N} - 0,25.679\text{N}}{88\ kg} \approx 2,5\ \tfrac{m}{s^2}$$

Y la nueva fuerza de la barra es:

$$F_B = m_2.a - P_{2,x} + \mu_2.N_2 = 80\,kg.2,59\tfrac{m}{s^2} - 392\,\text{N} + 0,25.679\,\text{N} \approx -15\,\text{N}$$

La barra hace 15 N de fuerza sobre los cuerpos, pero ahora de compresión, es decir empujando a los cuerpos hacia fuera (sentido al revés del dibujado).

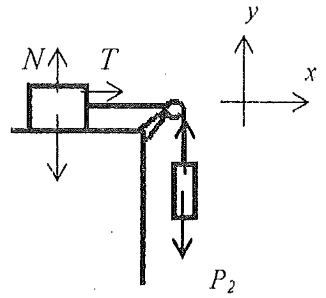
(c) en este caso, como los dos cuerpos tienen el mismo μ, espero que al tener la misma tendencia a caer, la cuenta me diga que la barra **no** está ni traccionada ni comprimida:

$$a = \frac{P_{1,x} + P_{2,x} - \mu_1.N_1 - \mu_2.N_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{78,4\,\text{N}.0,5 + 784\,\text{N}\,.0,5 - 0,25.67,9\,\text{N} - 0,25.679\text{N}}{88\ kg} \approx 2,78\ \tfrac{m}{s^2}$$

$$F_B = m_2.a - P_{2,x} + \mu_1.N_1 = 80\,kg.2,78\tfrac{m}{s^2} - 392\,\text{N} + 0,25.679\,\text{N} \approx 0$$

24. Calcule la aceleración de los cuerpos m_1 y m_2 y la tensión en las cuerdas en cada caso. Considere las poleas como ideales y desprecie la fricción de m_1. Primero resuelva algebraicamente; y luego analice el movimiento para: m_1= 4 kg ; m_2= 6 kg.



(a) Hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo. Pero esta vez *no* vamos a usar un sistema de "ejes solidarios", sino los cartesianos comunes y corrientes. Por esta decisión debo relacionar las aceleraciones con más cuidado, ya que cuando la masa de arriba se acelera hacia la derecha (+a en el eje x), la que cuelga se acelera en el sentido negativo del eje y (-a).

Así la 2da ley se escribe: $m_1: \begin{cases} x)\ T = m_1.a \\ y)\ N - P_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad m_2:\ y)\ T - P_2 = m_2.(-a)$

Este tipo de complicaciones es la que se busca evitar cuando se toma un sistema "solidario de ejes": poder poner que es la misma "a", en el mismo eje, para cada cuerpo. Pero en la materia debemos resolver problemas más difíciles que los del CBC, por lo tanto debemos acostumbrarnos de a poco. Para hallar la aceleración, uso $g = 10 m/s^2$:

$$T - m_2.g = m_2.(-a) \xrightarrow{T=m_1.a} m_1.a - m_2.g = m_2.(-a) \rightarrow a.(m_1 + m_2) = m_2.g$$

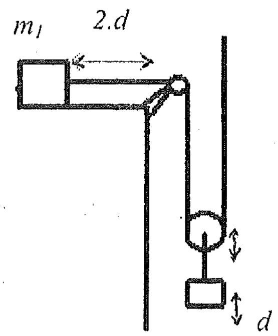
Y de aquí: $a = \dfrac{m_2.g}{(m_1 + m_2)} = 6\ {}^{m}/_{s^2}$ ... reemplazando ... $T = m_1.a = 24\,\text{N}$

Podés revisar el planteo con el "sistema solidario" del CBC. Da lo mismo.

(b)

Las poleas móviles

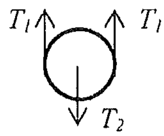
Tenemos que aprender 2 cosas nuevas. La primera tiene que ver con la relación de aceleraciones entre los cuerpos que quedan vinculados, la segunda con las tensiones de las cuerdas.



1) relación de aceleraciones: si nos fijamos en el dibujo del sistema podemos ver que ya *no* es cierto que los cuerpos se mueven todo el tiempo de la misma manera. Por ejemplo, cuando el m_2 se desplaza 1 metro hacia abajo, la polea de la que cuelga debe haberse movido también 1 metro hacia abajo. Por lo tanto, es evidente que la soga de la que cuelga es 1 metro más larga de cada lado. Por lo tanto m_1 debe haberse corrido 2 metros (el doble) hacia la derecha. De esta forma, el cuerpo unido a la polea móvil se mueve la mitad que el que se encuentra horizontal en todo instante: $d_1 = 2.d_2$.

Y derivando esta relación dos veces se deduce que la aceleración del 1 hacia la derecha vale el doble que la del 2 sobre el eje y.

2) las tensiones aplicadas a los cuerpos no son iguales, porque no están conectados por la misma cuerda. La clave para sacar la relación es plantear el diagrama de la polea que cuelga: de ambos lados tiene aplicada la tensión de la cuerda conectada al m_1, y en el centro tiene aplicada la tensión de la cuerda conectada m_2. Como ***la polea tiene masa despreciable***, por la 2da ley:



$$2.T_1 - T_2 - \cancel{P_{polea}} = \cancel{M_{polea}}.a \quad \rightarrow \quad 2.T_1 = T_2$$

Planteo la 2da ley para cada masa: $m_1 : \begin{cases} x)\ T_1 = m_1.a_1 \\ y)\ N - P_1 = 0 \end{cases} \qquad m_2 :\ y)\ T_2 - P_2 = m_2.a_2$

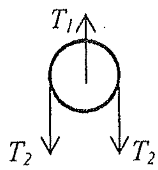
Reemplazamos las relaciones encontradas $2.T_1 = T_2$ y $a_1 = -2.a_2$ y uso $g = 10\ m/s^2$

$$\begin{cases} T_1 = -m_1.2.a_2 \\ 2.T_1 - P_2 = m_2.a_2 \end{cases} \rightarrow 2.(-m_1.2.a_2) - m_2.10\tfrac{m}{s^2} = m_2.a_2$$

$$-m_2.10\tfrac{m}{s^2} = a_2.(m_2 + 4.m_1) \xrightarrow{despejo} a_2 \approx -2{,}73\tfrac{m}{s^2}\,\hat{j} \rightarrow a_1 = -2.a_2 \approx 5{,}46\tfrac{m}{s^2}\,\hat{i}$$

Mientras que las tensiones: $T_1 = -2.m_1.a_2 \approx 21{,}8\,\mathrm{N} \rightarrow T_2 = 2.T_1 \approx 43{,}7\,\mathrm{N}$

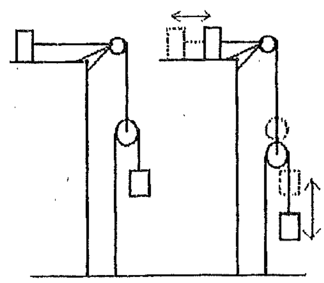
(c) las relaciones entre aceleraciones y tensiones son similares al caso anterior, teniendo cuidado que esta vez la Tensión aplicada al m_2 es la mitad de la del m_1. Como antes, aplico la 2da ley a la polea, y concluimos que como su masa es despreciable



$$T_1 - 2.T_2 = 0 \rightarrow T_1 = 2.T_2$$

También en la relación de aceleración intercambiaron los papeles. Razonando como en la parte (b) vemos que cuando m_1 se corre 1 m para la derecha, la polea móvil cae también 1 m, por lo tanto hay 1m de soga del lado izquierdo que pasa del lado derecho, que se suma a lo que cae la polea, para dar que m_2 cayó 2 m.

Con un ejemplo numérico por ahí es más fácil de ver: supongamos que la cuerda que rodea la polea móvil mide 10m, de los cuales están 8m del lado izquierdo y 2m del lado derecho. Cuando esa polea cae 1m, del lado izquierdo quedarán 7m y del derecho 3m. Es decir, la masa colgante está 1m más debajo de la polea móvil, la que a su vez bajó 1m. Sumando los dos desplazamientos, obtengo que m_2 bajó el doble que el m_1: $2.d_1 = d_2$.



Derivando dos veces esta relación se llega a que los módulos de las aceleraciones de los cuerpos guardan la misma relación: $2.a_1 = a_2$

Aplicando la 2^{da} ley de Newton: $m_1 : \begin{cases} x)\ T_1 = m_1.a_1 \\ y)\ N - P_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad m_2 :\ y)\ T_2 - P_2 = m_2.a_2$

Reemplazamos las relaciones encontradas $T_1 = 2.T_2$ y $-2.a_1 = a_2$

$$\begin{cases} 2.T_2 = m_1.a_1 \\ T_2 - P_2 = -2.m_2.a_1 \end{cases} \rightarrow (\tfrac{1}{2}.m_1.a_1) - m_2.10\tfrac{m}{s^2} = -2.m_2.a_1$$

$$\xrightarrow{despejo} a_1.(\tfrac{1}{2}m_1 + 2.m_2) = m_2.10\tfrac{m}{s^2} \rightarrow a_1 \approx 4{,}3\tfrac{m}{s^2}\,\hat{i} \rightarrow a_2 = -2.a_1 \approx -8{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\,\hat{j}$$

Mientras que las tensiones: $T_1 = m_1.a_1 \approx 17\,\mathrm{N} \rightarrow T_2 = \tfrac{1}{2}T_1 \approx 8{,}6\,\mathrm{N}$

Resumiendo los resultados con poleas móviles:

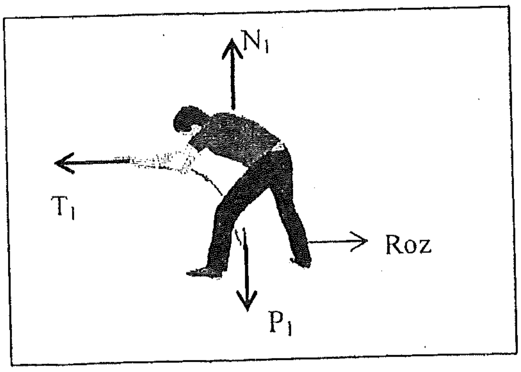
(♙) el cuerpo que está conectado a la polea móvil tiene la mitad de aceleración que aquel que está conectado a la soga que rodea a la polea móvil. Esto vale mientras un extremo de la soga que rodea esté agarrado a algo fijo (techo o piso), como en (b) y (c)

(♙♙) la tensión de la soga que está conectada a la polea móvil es el doble que la de la soga que rodea a la polea móvil. Esto vale mientras la polea no tenga masa.

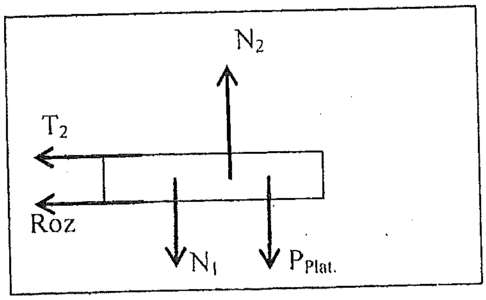
25.A. Un hombre de masa m_h se encuentra parado sobre una plataforma de masa m_p, encontrándose inicialmente ambos en reposo. En un determinado momento, el hombre comienza a tirar de una soga ideal con una fuerza **F** para acercarse a la pared. Si el hombre no se desplaza respecto de la plataforma y el rozamiento entre la plataforma y el piso es despreciable, calcular la aceleración del sistema hombre-plataforma y la fuerza de rozamiento estática entre el hombre y la plataforma para los siguientes casos: a) $m_h > m_p$ b) $m_h = m_p$ c) $m_h < m_p$

Empiezo por el diagrama de cuerpo libre de los dos participantes del problema, el hombre y la plataforma.

El hombre recibe la tensión de la soga, el peso, y las dos interacciones con la plataforma: la Normal N_1 y el rozamiento (son internas al sistema hombre/plataforma).



La plataforma recibe la tensión de la soga, el peso, la Normal N_2 con el piso, y las interacciones con el hombre: el par de la normal N_1 y el rozamiento (internas al sistema)



Info: resueltoscbc@gmail.com

Y antes de seguir, contesto las preguntas que me imagino me harías:

① ¿los dos cuerpos reciben la misma tensión? Cuando las poleas no tienen masa, la soga que la enrolla tiene la misma tensión de ambos lados (hasta que lleguemos a Cuerpo Rígido, este es el único caso posible). La soga tiene una única tensión. Así que por eso a ambas las voy a llamar "T".

② ¿los dos tienen la misma aceleración? Sí, porque la persona tironea de la soga y la va recogiendo parada firmemente sobre el bloque. Eso lo dice el enunciado. Todo el sistema se mueve hacia la izquierda en conjunto y solidariamente, y la fuerza de rozamiento entre ambos es estática.

③ ¿Cómo se deciden los sentidos del rozamiento en cada uno? En principio, como es un par de interacción entre el hombre y la plataforma, <u>deben</u> dibujarse con sentido opuesto. Se pueden poner al revés, pero en <u>ambos cuerpos</u>, respetando el 3er principio. Igual las cuentas terminan diciendo el sentido correcto, pueden poner un signo menos en su resultado (ver discusión de los casos al final). Yo imaginé que las cosas ocurren de esta manera: la persona tira de la soga haciendo fuerza hacia la derecha, y así recibe de la soga una fuerza igual y hacia la izquierda (la tensión T) que tiende a moverla en sentido hacia la pared. De inmediato, aparece el rozamiento que tiende a hacer que el hombre y la plataforma no se muevan en forma relativa. ¿Qué tiene que hacer para lograrlo? Una fuerza sobre la persona que tienda a frenar su viaje hacia la pared (ejerciendo una fuerza hacia la derecha), junto con una fuerza de reacción sobre el bloque para que éste tienda a acompañar a la persona. Eso es lo que me parece lógico; así decidí los sentidos del rozamiento.

④ ¿Qué relación existe entre la fuerza **F** que aplica el hombre a la soga y la tensión? Es un par de interacción, la fuerza **F** que el hombre le hace a la soga, y la tensión **T** que la soga le hace al hombre son del mismo valor y sentido opuesto. Vale que le ponga el mismo nombre y en lugar de poner T (tensión) pongo **F**. Y por lo que dijimos en el ① también para la Tensión aplicada a la plataforma vale poner **F**.
Las ecuaciones de ambos, eligiendo un sistema de referencia como el que indiqué en los diagramas quedan:

$$\text{Hombre: }\begin{cases} x)\ \mathbf{F} - Roz = m_h.a & \text{(i)} \\ y)\ N_1 - m_h.g = 0 & \text{(iii)} \end{cases} \qquad \text{Bloque: }\begin{cases} x)\ \mathbf{F} + Roz = m_p.a & \text{(ii)} \\ y)\ N_2 - N_1 - m_p.g = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{de\ \text{(ii)}} Roz = m_p.a - \mathbf{F} \quad \xrightarrow{en\ \text{(i)}} \mathbf{F} - (m_p.a - \mathbf{F}) = m_h.a$$

$$\xrightarrow{opero} \mathbf{F} - m_p.a + \mathbf{F} = m_h.a \quad \rightarrow 2.\mathbf{F} = m_p.a + m_h.a \quad \xrightarrow{despejo} a = \frac{2.\mathbf{F}}{m_h + m_p}$$

Y el rozamiento vale:

$$Roz = m_p.a - \mathbf{F} = m_p \frac{2.\mathbf{F}}{m_h + m_p} - \mathbf{F} \xrightarrow{factor\ común} = \mathbf{F}.\left(\frac{2.m_p}{m_h + m_p} - 1\right) = \mathbf{F}.\left(\frac{m_p - m_h}{m_h + m_p}\right) (\clubsuit)$$

Observemos que el signo del rozamiento depende de la relación entre m_p y m_h. Así tengo que:

a) en el caso $m_h > m_p$ la resta del numerador es negativa, la fuerza de rozamiento apunta en sentido contrario al dibujado en los DCL.

b) en el caso $m_h = m_p$ la resta del numerador es cero, la fuerza de rozamiento es nula.

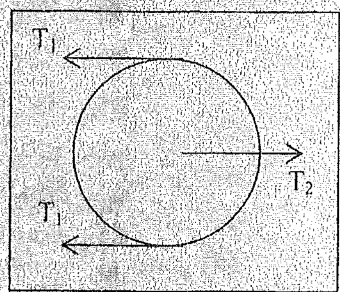
c) en el caso $m_h < m_p$ la resta del numerador es positiva, la fuerza de rozamiento apunta en el sentido dibujado en los DCL.

Resumiendo, para el de menor masa el rozamiento apunta hacia la derecha, contrario al movimiento. Yo diría que podemos interpretarlo así: por la geometría del problema, el hombre al tirar de la cuerda recibe una fuerza hacia la izquierda, que se transmite a través de la soga, y la plataforma recibe la misma fuerza **F** hacia la izquierda. Bueno, si ambos reciben la misma fuerza externa hacia el mismo lado, el de menor masa tiende a acelerar más, en consecuencia el rozamiento estático aparece para frenar al de menor masa (que tiende a ir más rápido), y apurar al otro, para que no se separen. O sea al de menor masa le hace una fuerza hacia atrás, para que espere, y al de mayor masa la reacción hacia adelante para que se apure. Es lógico, ¿no?

25.B. Un hombre de masa m_H está parado sobre una plataforma de masa $m_P = 3m_H$. Entre ellos el coeficiente de rozamiento es μ. El bloque está sobre un piso horizontal sin rozamiento. El hombre está tomado de una soga ideal y las poleas también son ideales.
a) Realice el diagrama de cuerpo libre para el hombre, el bloque y las poleas, para un observador inercial e indicar fuerzas exteriores e interiores para el sistema formado sólo por el hombre y el bloque. b) Calcule, justificando cada paso, la aceleración máxima para que el hombre no deslice sobre el bloque.

Los DCL son los mismos, ya mencioné cuáles son fuerzas interiores al sistema en cada cuerpo. Pero hay que hacer alguna distinción porque el problema cambió un poco. En principio, la fuerza **F** que aplica el hombre sobre la cuerda es igual a la Tensión T_1 que recibe el hombre. Pero como el sistema se vincula ahora a través de una polea móvil, ya no es la misma que la que tiene la plataforma, porque se trata de otra cuerda.

Así que propongo que pensemos en la ecuación de la polea unida a la plataforma: hay dos tensiones dirigidas hacia la pared (de la soga que la enrolla, y esas dijimos que son iguales, porque es la misma soga y la polea no tiene masa), y la de la plataforma, hacia la derecha. Escribo la 2^{da} ley de Newton:



$$2.T_1 - T_2 = \overbrace{m_{polea}}^{=0}.a \;\rightarrow\; T_2 = 2.T_1$$

Pero sigue siendo cierto que la plataforma y el hombre no deslizan entre sí, ambos se mueven juntos todo el tiempo, así que ambos se aceleran hacia la izquierda con la misma aceleración.

Además, hay una relación entre masas que plantear. Las ecuaciones de la dinámica quedan:

Hombre: $\begin{cases} x)\ T_1 - Roz = m_h.a & \text{(i)} \\ y)\ N_1 - m_h.g = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$ Bloque: $\begin{cases} x)\ T_2 + Roz = 3.m_h.a & \text{(ii)} \\ y)\ N_2 - N_1 - 3.m_h.g = 0 \end{cases}$

$$\xrightarrow{de\ (i)} T_1 = m_h.a + Roz \xrightarrow{en\ (ii),\ con\ T_2=2.T_1} 2.(m_h.a + Roz) + Roz = 3.m_h.a$$

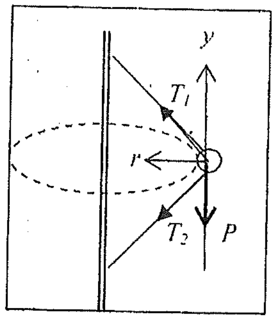
$$\xrightarrow{opero} 2.m_h.a + 2.Roz + Roz = 3.m_h.a \xrightarrow{despejo} a = \frac{3.Roz}{m_h} \quad (\clubsuit)$$

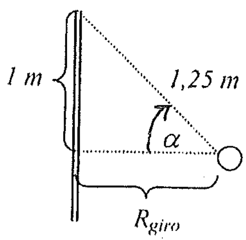
El rozamiento entre la persona y el bloque es estático. Su valor se encuentra entre 0 y el máximo (el "$\mu_e.N$", y la normal a usar es la N_1 de interacción entre ellos). De la igualdad ($\clubsuit$) se ve que para lograr la mayor aceleración necesito la mayor fuerza de rozamiento. Entonces, para el caso máximo:

$$a = \frac{3.Roz}{m_h} \leq \frac{3.\mu_e.N_1}{m_h} \xrightarrow{N_1=m_h.g} a_{máx} = 3.\mu_e.g$$

26. El bloque de 4 kg de la figura está unido a una varilla vertical con dos hilos. Cuando el sistema gira sobre el eje de la varilla, los hilos se extienden como se muestra y la tensión del hilo superior es de 70,0 N.
a. ¿Qué tensión soporta el otro hilo?
b. ¿Cuántas revoluciones por minuto da el bloque?
c. Calcular las revoluciones por minuto para que la tensión del hilo inferior sea nula
d. Explicar qué sucede si el número de rpm es inferior al calculado en (c)

Primero hago el DCL del bloque, con las dos tensiones y el peso. Como siempre, para plantear la 2^{da} ley de Newton, conviene tomar un eje radial r hacia el centro de la trayectoria, para evitarnos descomponer la a_c. Pero, a cambio, vamos a tener que descomponer las dos tensiones. Para eso vamos a buscar información geométrica con los datos que aparecen en el dibujo:





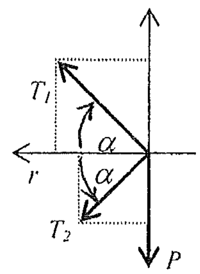
Como se muestra, el ángulo que forma cada soga con el eje radial se puede obtener gracias a la información del largo de la cuerda (hipotenusa del triángulo punteado) y la distancia sobre el eje (cateto opuesto del mismo triángulo). Por trigonometría:

$$sen(\alpha) = \frac{1m}{1{,}25m} \rightarrow \alpha \cong 53°$$

Este ángulo que forma la cuerda superior con el eje radial es también el que forma la T_1 con dicho eje. Por simetría se ve que la Tensión T_2 de la cuerda inferior forma un ángulo igual. De paso, saquemos el radio de giro, que es el cateto que nos falta del triángulo de arriba. Por Pitágoras:

$$R_{giro} = \sqrt{(1{,}25)^2 - 1^2} = 0{,}75\,m$$

Escribo la 2^{da} ley de Newton sobre cada eje:



$$\begin{cases} r)\ T_1.\cos(\alpha) + T_2.\cos(\alpha) = M.a_c \\ y) T_1.sen(\alpha) - T_2.sen(\alpha) - M.g = 0 \end{cases}$$

De la ecuación del eje y despejo:

$$T_2 = \frac{T_1.sen(53) - M.g}{sen(53)} = \frac{70.0{,}8 - 4.9{,}8}{0{,}8} = 21\,\text{N}$$

Reemplazo en la ecuación del eje r: $70.\cos(53) + 21.\cos(53) = 4.a_c \rightarrow a_c = 13{,}65\,\frac{m}{s^2}$

Usando las fórmulas del circular:

$$a_c = (2\pi.f)^2.R_{giro} \xrightarrow{despejo} f = \frac{\sqrt{\frac{a_c}{R_g}}}{2.\pi} = 0{,}679\,\frac{rev}{s} \xrightarrow{x60} f = 40{,}7\ rpm$$

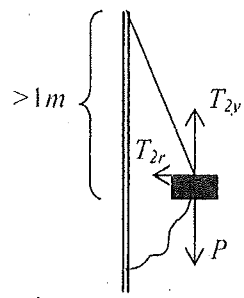
(c) en las ecuaciones anteriores, poniendo $T_2 = 0$:

$$y)\ T_1.sen(53) - 0.sen(53) - M.g = 0 \xrightarrow{despejo} T_1 = \frac{4\,kg.9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{0{,}8} = 49\,\text{N}$$

En la ecuación del eje radial:

$$r)\ 49\,\text{N}.\cos(53) + 0 = 4kg.(2.\pi.f)^2.0{,}75\,m \xrightarrow{despejo} f \approx 0{,}5\,\frac{rev}{s} \xrightarrow{x60} 30\ rpm$$

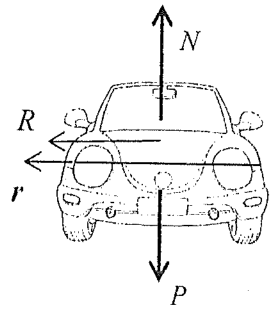
d) si la frecuencia de giro fuera menor que la calculada en (c), el cuerpo todavía seguiría girando, pero la cuerda inferior estaría siempre floja, y cambiaría el ángulo de la superior con el eje radial. En efecto, como al haber una frecuencia menor tenemos menos a_c, también debe disminuir la resultante en la dirección r. Por lo tanto, la componente en ese eje de la T_2 disminuye, mientras que la componente en el eje y no cambia (es igual al Peso) de manera que la T_2 está más vertical.



Así, el sistema se comporta como un péndulo cónico, que vimos en el CBC.

27. Una curva de autopista de 300 m de radio no tiene peralte. Suponga que el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el asfalto seco es de 0,75, entre los neumáticos y el asfalto mojado es de 0,5 y entre los neumáticos y el hielo es de 0,25. Determine la máxima velocidad con que se puede pasar la curva con toda seguridad en (i) días secos, (ii) días lluviosos y (iii) días helados. (b) Recalcule las velocidades halladas si la curva tiene un peralte de 3°. (c) Para el peralte del punto (b) calcule la velocidad mínima necesaria para que el auto no deslice hacia abajo debido a la inclinación de la autopista.

Hago un diagrama de cuerpo libre del coche cuando toma la curva. Es muy importante recordar que para poder girar, el auto necesita que haya una fuerza que apunte hacia el centro de la curva (eje radial "r"). En este caso, esa fuerza es el rozamiento, que aunque parezca extraño es un caso estático. Así es, el rozamiento de un neumático en general no es dinámico, por los motivos que estudiamos en el problema 15, es decir, el punto de apoyo no resbala sobre el piso, sino que al rodar el punto que pisa está quieto.



Que sea estático permite que esta fuerza vaya hacia el centro (es decir, es opuesta al movimiento relativo del auto, que tiende a salirse de la curva).

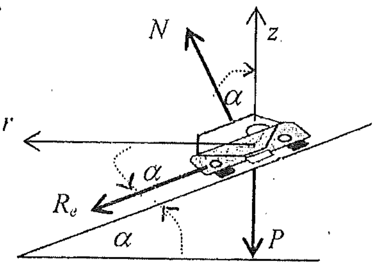
Aplicamos la 2da ley: $\begin{cases} r)\ R_e = M.a_c \\ z)\ N - P = 0 \end{cases}$

De la ecuación del eje vertical despejamos: $N = P = M.g$ y reemplazamos en la otra:

$$R_e = M.a_c \;\rightarrow\; \mu_e.\cancel{M}.g = \cancel{M}.\frac{v^2}{R} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\mu_e.g.R}$$

Obtenemos para cada μ que la velocidad máxima es: $47{,}4\,\frac{m}{s}$, $38{,}7\,\frac{m}{s}$ y $27{,}4\,\frac{m}{s}$.

b) en el caso de haber "peralte", debo plantear que el borde exterior de la ruta está levantado respecto del borde interior. Por lo tanto, hay una componente de la Normal en la dirección radial. desgraciadamente, también debo descomponer la fuerza de rozamiento, ya que como se ve en el dibujo forma un ángulo con la dirección radial "r".



Marqué el ángulo "α" en cada caso: para la Normal, vimos en el dibujo que es el ángulo comprendido con el eje "z" vertical, para el rozamiento, por alternos internos, se ve que es el ángulo que forma con la dirección radial. Escribimos la 2da ley:

$$r)\ N.sen(\alpha) + R_e.\cos(\alpha) = M.a_c \qquad z)\ N.\cos(\alpha) - R_e.sen(\alpha) - P = 0$$

Reemplazamos el ángulo $\alpha = 3°$, y los datos de masa y radio. Nos queda:

$$r)\ N.0{,}0523 + \mu_e N.0{,}9986 = M.\frac{v^2}{300\,m} \qquad z)\ N.0{,}9986 - \mu_e.N.0{,}0523 - M.10\,\frac{m}{s^2} = 0$$

De la segunda ecuación se despeja la normal: $N = \dfrac{M.10\,\frac{m}{s^2}}{(0{,}9986 - \mu_e.0{,}0523)}$

En la primera:

$$\frac{\cancel{M}.10}{(0{,}9986-\mu_e.0{,}0523)}.0{,}0523+\mu_e\frac{\cancel{M}.10}{(0{,}9986-\mu_e.0{,}0523)}.0{,}9986=\cancel{M}.\frac{v^2}{300}$$

Como la masa está repetida en todos los términos se la puede simplificar, y luego se reemplaza los tres coeficientes μ_e para despejar la velocidad máxima de cada caso. La cuenta me dio: 48,5 $\frac{m}{s}$; 41,25 $\frac{m}{s}$ y 30,3 $\frac{m}{s}$. Como vemos, el peralte ayuda algo, permitiendo que la máxima velocidad de giro sea un poco superior, que en el caso sin él.

c) en el caso que el coche circule a baja velocidad, tiende a caer por la inclinación de la pista. En ese caso la fuerza de rozamiento cambia de sentido. El valor mínimo de velocidad se tiene cuando el rozamiento toma el valor estático máximo, pero en sentido contrario al planteado en (b). Basta cambiar el signo del mismo en las dos ecuaciones, y repetir el despeje que hicimos (el resultado es el mismo que en b, pero en cada lugar que está el μ_e hay que cambiar el signo):

$$\frac{\cancel{M}.10}{(0{,}9986+\mu_e.0{,}0523)}.0{,}0523-\mu_e\frac{\cancel{M}.10}{(0{,}9986+\mu_e.0{,}0523)}.0{,}9986=\cancel{M}.\frac{v^2}{300}$$

En todos los casos la cuenta da que la velocidad mínima para este valor del peralte es cero (en realidad queda v^2 igual a algo negativo). Esto ocurre porque con una inclinación de apenas 3° es posible detener el coche en la curva que aun así no caería.

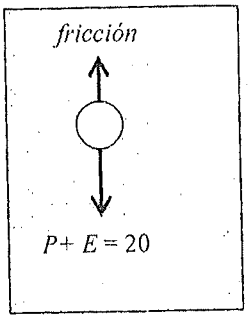
Observación: en el CBC resolvimos que para un cuerpo apoyado en un plano inclinado, el ángulo para el cual se rompe el equilibrio y desliza hacia abajo satisface $\mathrm{tg}(\alpha) = \mu_e$. De esta condición sale que para que aparezca una velocidad mínima hace falta por lo menos un ángulo de 14° (para el caso más resbaloso del "hielo", para los otros casos es necesario una inclinación todavía mayor).

28. Una roca de masa 3 kg cae desde el reposo en un medio viscoso. Sobre ella actúan la fuerza neta constante de 20 N (combinación de la fuerza gravitatoria y de la fuerza de flotación ejercida por el medio) y la fuerza de resistencia del fluido $f = -k.v$, donde v es la velocidad en m/s y $k = 2$ N s/m. Calcular:

a. aceleración inicial
b. aceleración cuando $v = 3\ m/s$
c. velocidad terminal
d. posición, velocidad y aceleración 2 s después de iniciado el movimiento

Info: resueltoscbc@gmail.com

La roca que cae por el fluido recibe tres fuerzas: el peso, el empuje que tiende a hacerlo flotar, y una fuerza de fricción que resiste su caída. Las dos primeras son constantes, y en conjunto hacen una fuerza de 20 N (hacia abajo, ya que el peso le gana al empuje, se la suele llamar peso aparente porque el fluido está compensando una parte del verdadero Peso que sería 30N). La última es una fuerza que depende de la velocidad. Tomo un eje vertical con sentido positivo hacia abajo:



$$P_{ap.} - F_{fricción} = m.a \;\rightarrow\; 20\,\mathrm{N} - 2\mathrm{N}\tfrac{s}{m}.v = 3\;kg.a \quad (\heartsuit)$$

a) como empieza del reposo:

$$20\,\mathrm{N} - 2\mathrm{N}\tfrac{s}{m}.\overbrace{0}^{v} = 3\;kg.a \quad\rightarrow\quad a = \frac{20\,\mathrm{N}}{3\;kg} = 6{,}\widehat{6}\;\tfrac{m}{s^2}$$

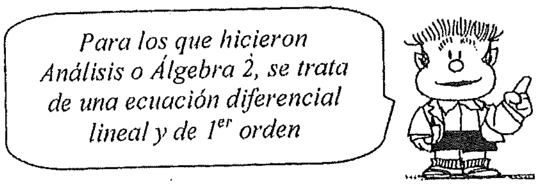
Observación: esta aceleración es por un instante, de inmediato provoca que el cuerpo tome velocidad de caída y empiece a actuar la $F_{fricción}$

b) cuando ya tiene $v = 3$ m/s: $\quad 20\,\mathrm{N} - 2\mathrm{N}\tfrac{s}{m}.3\tfrac{m}{s} = 3\;kg.a \quad\rightarrow\quad a = \dfrac{14\;\mathrm{N}}{3\;kg} = 4{,}\widehat{6}\;\tfrac{m}{s^2}$

c) observemos lo que nos dicen los resultados anteriores; a medida que actúa la aceleración, aumenta la velocidad y con eso aumenta la $F_{fricción}$, que disminuye la aceleración. Es decir, la ***velocidad va en aumento***, pero la ***aceleración disminuye***. Y a medida que la piedra baja, su velocidad aumenta pero cada vez menos. Se llega a una velocidad límite que es la mayor que alcanza, y que se produce para aquella velocidad (que llamamos terminal: v_T) en la cual deja de haber aceleración. En la 2^{da} ley:

$$20\,\mathrm{N} - 2\mathrm{N}\tfrac{s}{m}.v_T = 0 \quad\rightarrow\quad v_T = \frac{20\;\mathrm{N}}{2\mathrm{N}\tfrac{s}{m}} = 10\;\tfrac{m}{s}$$

d) este es el punto más complicado de todos, debo encontrar las ecuaciones horarias integrando la 2^{da} ley de Newton. Como la aceleración es la derivada de la velocidad, en ($\heartsuit$) puedo poner:



$$\boxed{20 - 2.v = 3.v'} \quad\rightarrow\quad 20 - 2.v = 3.\frac{dv}{dt}$$

Resolviendo una ecuación diferencial

Tenemos una igualdad que relaciona las variables v, t y sus diferenciales. Lo primero que hago es separar de modo que quede una igualdad del tipo $g(t)dt = f(v).dv$, es decir de un lado la única variable es la velocidad y del otro el tiempo, de cada lado con su respectivo diferencial:

$$\xrightarrow{\text{paso de lado}} dt = \frac{3}{20-2.v}dv$$

Ahora integro de cada lado respecto a cada variable:

$$\int_0^t 1.dt = \int_{v_0=0}^{v} \frac{3}{20-2.v}dv \xrightarrow{\text{Integro}} t = -\tfrac{3}{2}.\ln|20-2.v| \Big|_0^v$$

$$\xrightarrow{\text{Barrow}} -\tfrac{2}{3}t = \ln(20-2v) - \ln(20)$$

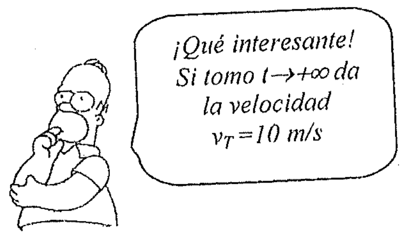
Hago cuatro observaciones sobre esta integración:

- olvidate de la interpretación física de cada variable, se integra como cualquier letra.
- los extremos de cada integral son los valores iniciales y finales de cada variable.
- del lado derecho sustituí: $s = 20\text{-}2.v$; $ds = \text{-}2.dv$. Directamente escribí el resultado
- en el logaritmo saqué el módulo, porque en (c) vimos que la mayor velocidad alcanzada es 10 m/s, por lo tanto el argumento del logaritmo es positivo.

A continuación despejo la función velocidad. Con cuidado:

$$-\tfrac{2}{3}t + \ln(20) = \ln(20-2v) \xrightarrow{\text{paso ln}} 20-2v = e^{-\frac{2}{3}t+\ln(20)} = e^{-\frac{2}{3}t}.e^{\ln(20)} = 20.e^{-\frac{2}{3}t}$$

$$2.v = 20 - 20.e^{-\frac{2}{3}t} \xrightarrow{\text{despejo}} \boxed{v_{(t)} = 10 - 10.e^{-\frac{2}{3}t}}$$



La velocidad en $t = 2s$ es: $v_{(2)} = 10 - 10.e^{-\frac{4}{3}} \approx 7{,}634 \frac{m}{s}$ ✓

Con esta velocidad podemos sacar la aceleración a los $t = 2s$ (antes no era posible porque la 2[da] ley relaciona la aceleración con la velocidad, ***no*** con el tiempo):

$$20\,\text{N} - 2\text{N}\tfrac{s}{m}.(7{,}634\tfrac{m}{s}) = 3\ kg.a \quad \rightarrow \quad a = \frac{4{,}732\ \text{N}}{3\ kg} \cong 1{,}577\ \tfrac{m}{s^2}$$ ✓

Info: resueltoscbc@gmail.com

Para encontrar la posición, debemos integrar la velocidad, ya que $v = x' = \frac{dx}{dt}$

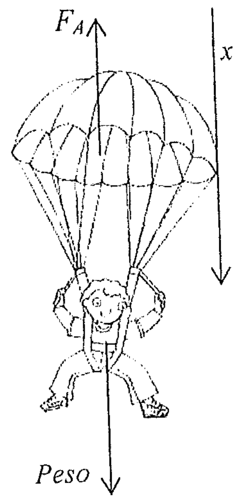
$$v_{(t)} = 10 - 10.e^{-\frac{2}{3}t} \rightarrow dx = \left(10 - 10.e^{-\frac{2}{3}t}\right).dt \xrightarrow{Integro} \int_{x_o=0}^{x} 1.dx = \int_{0}^{t}\left(10 - 10.e^{-\frac{2}{3}t}\right).dt$$

Reitero las observaciones que hicimos al integrar por primera vez: ① sólo integro si existe una variable de cada lado, y el diferencial respectivo (esto se llama separación de variables, lo vas a ver mejor en Análisis 2); ② los límites de integración son los valores iniciales y finales de cada variable (elijo $x_o = 0$). Resuelvo, usando del lado derecho la sustitución: $u = -\frac{2}{3}.t$; $du = -\frac{2}{3}.dt$

$$x_{(t)} = 10.t + 15.e^{-\frac{2}{3}t} \Big|_{0}^{t} \xrightarrow{Barrow} x_{(t)} = \left(10.t + 15.e^{-\frac{2}{3}t}\right) - (15) = -15 + 10.t + 15.e^{-\frac{2}{3}t}$$

Evaluamos en $t = 2s$: $x_{(2)} = -15 + 10.2 + 15.e^{-\frac{4}{3}} \approx 8{,}95\ m$

29. Un paracaidista se deja caer desde un helicóptero estacionario. Cae libremente (como en el vacío) durante 5 segundos. Abre entonces el paracaídas. La masa del paracaidista es de 80 kg. La resistencia que el aire opone a su caída es **F**= -**K.v**. Calcular: (a) ¿cuánto tiempo después de abrir el paracaídas se llega a una velocidad mitad de la del momento de apertura? (**K** = 160 kg/s; desprecie la masa del paracaídas)



Veamos qué velocidad adquiere el paracaidista en la caída libre. Para eso usamos la aceleración de la gravedad, y que la caída empieza sin velocidad. Tomando sentido (+) hacia abajo:

$$v = v_o + g.t = 0 + 10\frac{m}{s^2}.5s = 50\frac{m}{s}$$

Y ahora planteo la caída con el paracaídas desplegado. La resistencia del aire le aplica una fuerza opuesta al movimiento (como cae, una fuerza hacia arriba) proporcional a la velocidad. Esto nos indica que la fuerza es variable con el tiempo. La 2da ley de Newton nos queda así

$$P - F_A = m.a \xrightarrow{despejo} a = \frac{m.g}{m} - \frac{k.v}{m} \xrightarrow{simplifico} a = 10 - 2.v$$

Esta es una ecuación diferencial, ya que relaciona la "velocidad" v con su derivada (la aceleración). Para resolverla, debemos integrar usando el método de variables separables:

$$a = 10 - 2.v \rightarrow \frac{dv}{dt} = 2.(5 - v) \xrightarrow{paso\ de\ lado} \frac{1}{5-v}\,dv = 2.dt$$

Info: resueltoscbc@gmail.com

Integramos de ambos lados respecto a cada variable. Observar los límites de las integrales (la velocidad entre el valor inicial 50 y el final que nos piden: 25; para el tiempo consideramos el inicial 0 cuando abre el paracaídas hasta el final "t"):

$$\xrightarrow{Sust:\ s=5.v\ ,\ ds=-dv} \int_{50}^{25} \frac{1}{5-v}\, dv = \int_{0}^{t} 2.dt \xrightarrow{integro} \left[-\ln(5-v)\right]_{50}^{25} = \left[2.t\right]_{0}^{t}$$

$$\xrightarrow{Barrow} -\ln|-20|+\ln|-45|=2.t \xrightarrow{despejo} t \approx 0{,}4\,s$$

Es decir, menos de medio segundo después de haber abierto el paracaídas.

Movimiento Oscilatorio Armónico Simple

Resolvimos en los dos últimos problemas el movimiento de un objeto sometido a una fuerza dependiente de la velocidad. Vimos que en ese caso, la 2^{da} ley de Newton se convirtió en una ecuación diferencial, que se resuelve mediante métodos de integración. Un caso de interés es el de cuerpos que tienen aplicada una única fuerza dependiente de la posición x. También aparece una ecuación diferencial, entre la posición x y su derivada segunda la aceleración x''. Se plantea de esta manera:

1) se plantea la 2^{da} ley de Newton que tiene la forma $\underbrace{-C.x}_{F} = m.a \xrightarrow{despejo} a = -\Omega^2.x$.

En estas condiciones, se observa que el cuerpo se mueve oscilando alrededor de una posición de equilibrio (punto donde la fuerza resultante en la dirección de movimiento es nula). El problema típico es el un cuerpo enganchado a un resorte, el cuerpo oscila simétricamente alrededor de la posición de equilibrio $x = 0$ (donde la fuerza elástica se anula). La constante Ω se la llama pulsación, y para cada sistema oscilatorio tiene una expresión característica que más adelante estudiaremos.

2) la solución a esta ecuación de movimiento es la función: $x_{(t)} = A.sen(\Omega.t + \phi_o)$

Donde A es la amplitud de la oscilación (se decir cuanto se desplaza a izquierda y derecha de la posición de equilibrio), Ω se la llama pulsación, y se la relaciona con la rapidez con que se produce la oscilación, y ϕ_o se la llama fase inicial, y se relaciona con el punto de la oscilación en que empieza ésta (ver más adelante). Esta ecuación viene dada en otros textos de otras maneras equivalentes. Por ejemplo, en lugar de la función seno, algunos textos usan coseno. O en lugar de la pulsación Ω, se suele también usar la frecuencia f (cantidad de oscilaciones por segundo) o el período T (tiempo demorado en hacer una oscilación completa). Las relaciones entre estas magnitudes son similares a las del movimiento circular:

$$\Omega = 2.\pi.f \quad ; \quad f = \frac{1}{T} \quad ; \quad \Omega = \frac{2.\pi}{T}$$

Info: resueltoscbc@gmail.com

Observar que la pulsación cumple el papel de la velocidad angular en estas fórmulas. En algunos textos incluso se la llama de esa manera, aunque en mi opinión resulta inadecuado, ya que estos movimientos en general no son giros.

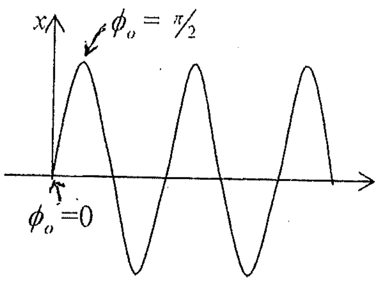
Las funciones velocidad y aceleración se obtienen derivando respecto del tiempo:

$$x = A.sen(2\pi f.t + \phi_o) \rightarrow v = \overbrace{A.(2\pi f)}^{v_{máx}}.\cos(2\pi f.t + \phi_o) \rightarrow a = -\overbrace{A.(2\pi f)^2}^{a_{máx}}.sen(2\pi f.t + \phi_o)$$

Como el mayor valor de la función seno o coseno es 1, los factores que figuran delante de ellas representan el valor máximo que puede tomar la velocidad y la aceleración.

Sobre el significado de la fase inicial, graficando la posición se aclara el concepto. Como sabemos, se trata de una función seno o coseno, por lo tanto tengo una onda del estilo del gráfico siguiente.

Según en que condiciones se inicie el problema, será el valor de esta fase ϕ_o. Así, si el problema arranca en $\phi_o = 0$, significa que empieza saliendo de la posición de equilibrio, moviéndose para el lado de los x positivos; si $\phi_o = \pi/2$, significa que sale de la posición más extrema positiva, partiendo del reposo.



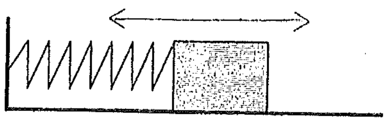
Observación: si no es importante en qué circunstancias se inició la oscilación se elige $\phi_o = 0$.

Dos ejemplos típicos de M.O.A.S.

① la oscilación de un cuerpo de masa M enganchado a un resorte de constante elástica k, en una superficie sin rozamiento.

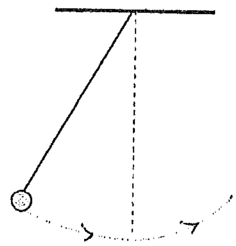
En este caso, la pulsación de la oscilación viene dada por:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{k}{M}}$$



② la oscilación de un péndulo formado por un hilo de masa despreciable y longitud L y una masa que cuelga de valor M, alrededor de la posición de equilibrio vertical.

En este caso es necesario que sea despreciable la fricción con el aire y que el ángulo de apartamiento de la vertical sea muy pequeño (es necesario que $sen(\theta) \approx \theta$, que se acepta como correcta para ángulos menores a 10°). Se cumple:



$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Observación: para este oscilador, la posición x se interpreta como la ubicación sobre el arco de trayectoria curvo. Es más común verlo escrito como s. En algunas ocasiones, la posición usada es el ángulo de apartamiento con la vertical θ. En esos casos las expresiones de la página anterior de posición, velocidad y aceleración se cambian por:

$$s = A.sen(2\pi f.t + \phi_o) \rightarrow v = \overbrace{A.(2\pi f)}^{v_{máx}}.\cos(2\pi f.t + \phi_o) \rightarrow a = \overbrace{-A.(2\pi f)^2}^{a_{máx}}.sen(2\pi f.t + \phi_o)$$

Aquí, ω y γ son la velocidad y aceleración angular de la oscilación, no tienen nada que ver con la pulsación Ω ni con la frecuencia f. La aceleración a es la componente tangencial del vector aceleración, es decir la que mide el cambio en el módulo del vector velocidad.

30. Un péndulo simple de longitud L oscila con amplitud A. Exprese, como función del tiempo, (a) su desplazamiento angular, (b) velocidad angular, (c) aceleración angular, (d) velocidad lineal, (e) aceleración centrípeta y (f) la tensión de la cuerda si la masa de la lenteja es de 1 kg.

(a) el desplazamiento angular vienen dado por la expresión $\theta = \theta_{máx}.sen(\Omega.t + \varphi_o)$, donde $\theta_{máx}$ es el máximo desplazamiento angular (es la amplitud angular A del enunciado), y la pulsación es $\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Eligiendo como condición inicial $\varphi_o = 0$: $\theta_{(t)} = A.sen(\Omega.t)$

(b) la velocidad angular sale derivando esta expresión $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = A.\Omega.\cos(\Omega.t)$

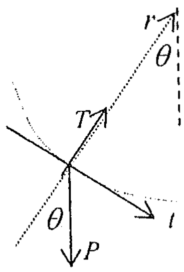
Observación: esta es una expresión del tiempo, que nos indica la rapidez del cambio de θ. Insisto en que no tiene nada que ver con la pulsación Ω, que es el número calculado en (a).

(c) vuelvo a derivar $\gamma = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{d^2t} = -A.\Omega^2.sen(\Omega.t) \xrightarrow{\Omega=\sqrt{g/L}} \gamma = -\dfrac{A.g}{L}.sen(\Omega.t)$

(d) la velocidad lineal la obtenemos de la expresión $v = \omega.R = A.\Omega.L.\cos(\Omega.t)$

(e) la obtengo con la expresión $a_c = \omega^2.R \xrightarrow{R=L} a_c = A^2.\Omega^2.L\cos^2(\Omega.t)$

Mucho cuidado de no confundirla con la otra componente de la aceleración, la tangencial, que se obtiene derivando dos veces la posición s, o mediante la relación $a_t = \gamma.L$



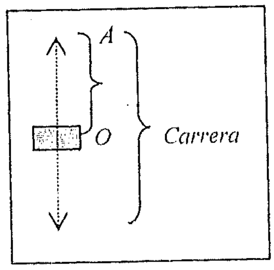
(f) la tensión de la cuerda sale del DCL, en el cual tengo aplicadas las fuerzas Peso y tensión. Como vemos, si uso el eje radial y tangencial que acostumbramos en los problemas de movimiento circular, se tendrá la siguiente ecuación para el eje radial:

$$r)\ T - M.g.\cos(\theta) = M.a_c \xrightarrow{reemplazo}$$

$$T = M.g.\cos(\theta) + M\ .A^2.g.\cos^2(\Omega.\ t)$$

Donde $\theta_{(t)} = A.sen(\Omega.t)$

31. El movimiento del pistón de un motor de un automóvil es aproximadamente un MAS.
a- Si la carrera de un motor (el doble de su amplitud) es de 0,100 m y el motor trabaja a 2500 rpm, calcular la aceleración del pistón en el extremo de la carrera.
b- Si el pistón tiene una masa de 0,35 kg ¿qué fuerza neta debe ejercerse sobre él en ese punto?
c- ¿Qué velocidad tiene el pistón, en m/s, en el punto medio de su carrera?
d- Repetir los ítems (b) y (c) con el motor trabajando a 5000 rpm.



Hago un esquema para completar la interpretación: tengo un pistón que sube y baja ejecutando un movimiento armónico simple, el punto central es la posición de equilibrio, y la distancia entre los extremos se llama "carrera" del pistón y como se ve es el doble de la amplitud de la oscilación. Completo las expresiones del MAS:

- paso la frecuencia a vueltas por segundo: $2500\frac{rev}{\min} \xrightarrow{\%\ 60} 41,\widehat{6}\ \frac{1}{s}$
- saco la amplitud, dividiendo la "carrera" por la mitad: $A = 0,05\ m$

Y ahora para contestar pienso lo siguiente: las posiciones extremas son las que más alejadas de la posición de equilibrio, por lo tanto son las que tiene la mayor aceleración y fuerza aplicada (quizá no convenga pensarlo con el pistón, sino con un oscilador de resorte, cuanto más lejos del centro, mayor estiramiento y más fuerza recibe el cuerpo, en consecuencia más aceleración tiene). Resumiendo, debo hallar el valor máximo de aceleración para este MAS. De la página 20:

$$a_{máx} = A.(2.\pi.f)^2 \xrightarrow{cuenta} a_{máx} = 0,05\,m.(2.\pi.41,\widehat{6}\tfrac{1}{s})^2 \approx 3427\tfrac{m}{s^2} \quad \checkmark$$

b) la fuerza neta sale de la 2da ley de Newton: $\sum F = 0,35\,kg.3427\frac{m}{s^2} = 1200\text{N}$ ✓

c) en el punto medio es el la posición de equilibrio (a = 0). En ese punto es cuando alcanza la mayor velocidad posible (como en (a), conviene pensarlo para el oscilador de resorte: cuando pasa por la posición es cuando va más rápido, porque tiene máxima energía cinética). De esta forma, podemos interpretar que la pregunta equivale a preguntar la velocidad máxima, y de la teoría:

$$v_{máx} = A.(2.\pi.f) \xrightarrow{cuenta} v_{máx} = 0,05\,m.(2.\pi.41,\hat{6}\,\tfrac{1}{s}) \approx 13,1\,\tfrac{m}{s} \quad ✓$$

d) cambio de unidad la frecuencia: $5000\,\frac{rev}{\min} \xrightarrow{\%\,60} 83,\hat{3}\,\frac{1}{s}$

$$a_{máx} = 0,05\,m.(2.\pi.83,\hat{3}\,\tfrac{1}{s})^2 \approx 13700\,\tfrac{m}{s^2} \quad ; \quad \sum F = 0,35\,kg.13700\,\tfrac{m}{s^2} = 4800\,\mathrm{N}$$

$$v_{máx} = 0,05\,m.(2.\pi.83,\hat{3}\,\tfrac{1}{s}) \approx 26,2\,\tfrac{m}{s} \quad ✓$$

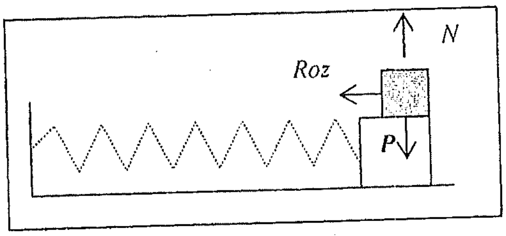
32. Un bloque de masa M descansa sobre una superficie lisa y está unido a un resorte horizontal de constante k. El otro extremo del resorte está fijo a una pared. Un segundo bloque de masa m está apoyado sobre el primero. El coeficiente de rozamiento estático entre los bloques es μ_s. Determinar la amplitud de oscilación máxima para la cual el bloque superior no resbale.

Considero a los dos cuerpos como un conjunto, de masa $(m+M)$, sujeto a un resorte, y ejecutando un MAS. Por lo que vimos en la página 20, la frecuencia de este oscilador será:

$$f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{k}{(M+m)}}$$

En el problema anterior, vimos que durante la oscilación, el cuerpo tiene una aceleración y una fuerza neta variable, y que el máximo valor de ambas se alcanza en los puntos extremos. En esa situación, se tiene:

$$a_{máx} = A.(2.\pi.f)^2 \xrightarrow{reemplazo\ y\ opero} a_{máx} = A.\frac{k}{(M+m)} \quad (\clubsuit)$$



Ahora pensemos en el cuerpo m de arriba. La única fuerza horizontal que tiene aplicada es el rozamiento estático con el cuerpo M de abajo. De la 2^{da} ley de Newton, en el punto extremo (es decir donde la aceleración es la máxima):

$$Roz = m.a_{máx} \xrightarrow{uso\ (\clubsuit)} Roz = m.\frac{A.k}{(M+m)}$$

De la ecuación vertical despejamos $N = m.g$, y usando la situación crítica, es decir el rozamiento estático máximo:

$$Roz = \cancel{m}.\frac{A.k}{(M+m)} \leq \mu_s.\cancel{m}.g \xrightarrow{despejo} A \leq g.\mu_s.\frac{(M+m)}{k} \quad ✓$$

La mayor posible corresponde a la situación límite (o sea con el signo "=")

33. Una partícula de 4 kg se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F} = -(\pi^2/16).x$ ...

Info: resueltoscbc@gmail.com

De la 2[da] ley de Newton: $m.a = -\left(\pi^2/16\right)x \xrightarrow{despejo} a = -\frac{\overbrace{\left(\pi^2/16\right)}^{esto\ es\ \Omega^2}}{m}.x$

La aceleración es variable con la posición, y tienen la forma que vimos en la teoría $a = -\Omega^2.x$. Por lo tanto, el movimiento asociado a la partícula es un MOAS. Identifico por comparación: $-\Omega^2 = -\frac{\pi^2}{64} \rightarrow \Omega = \frac{\pi}{8}$

La solución de esta ecuación diferencial es (ver la explicación de página 19 y 20):

$$x = A.sen(\Omega.t + \phi_o) \xrightarrow{reemplazo} x = A.sen\left(\tfrac{\pi}{8}.t + \phi_o\right)$$

Para sacar las constantes "A = amplitud" y "Φ_o= fase inicial", uso las condiciones iniciales:

- $t = 2, x = 0$: $\quad 0 = A.sen\left(\frac{\pi}{4} + \phi_o\right) \quad$ (I)
- $t = 4, v = 4$: $\quad$ derivo $v = x' = A.\cos\left(\frac{\pi}{8}.t + \phi_o\right)\frac{\pi}{8} \quad \rightarrow \quad 4 = A.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_o\right)\frac{\pi}{8} \quad$ (II)

De (I), como la amplitud de la oscilación no puede ser 0, encontramos que se anula entonces el seno, por lo tanto el ángulo de adentro debe valer 0 o π :

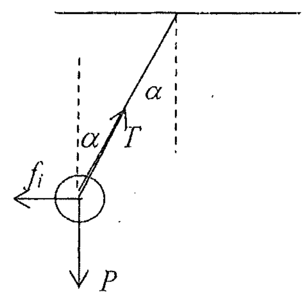
$$0 = sen\left(\tfrac{\pi}{4} + \phi_o\right) \rightarrow \tfrac{\pi}{4} + \phi_o = 0 \quad o \quad \tfrac{\pi}{4} + \phi_o = \pi \quad \rightarrow \quad \phi_o = -\tfrac{\pi}{4} \quad o \quad \phi_o = \tfrac{3}{4}\pi$$

Reemplazo la 1[ra] posibilidad en (II): $4 = A.\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}_{1/\sqrt{2}}\frac{\pi}{8} \xrightarrow{despejo} A = \frac{32.\sqrt{2}}{\pi}$ ✓

Y con el segundo ϕ_o : $\quad 4 = A.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)\frac{\pi}{8} \xrightarrow{despejo} A = \frac{4.\frac{8}{\pi}}{\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)} < 0$

Esta situación es absurda porque la amplitud debe ser un número positivo. Por lo tanto tenemos que la ecuación de movimiento correspondiente es: $x = \frac{32.\sqrt{2}}{\pi}.sen\left(\frac{\pi}{8}.t - \frac{\pi}{4}\right)$ ✓

34. Del techo de la caja de carga de un camión, que tiene una aceleración de 2 m/s^2, cuelga un péndulo simple de masa puntual m = 1 kg.
a) Calcular la tensión del hilo indicando claramente sistema de referencia usado, diagrama de cuerpo libre correspondiente y sistema de ecuaciones resultante. ¿Qué ángulo ...



a) Vamos a plantear el problema desde el sistema de referencia no inercial, unido al camión. Desde ahí todo transcurre como que el péndulo se encuentra quieto y el ángulo que forma el hilo respecto a la vertical es debido a una fuerza hacia atrás (la llamada fuerza ficticia o "inercial", de valor $f_i = m_p.\ a_{camión}$).

Esto coincide con la teoría que vimos en el cuadernillo 1 (si se mira el problema desde un sistema con aceleración "a_{sist} debo agregarle una fuerza opuesta de valor igual a "$m.a_{sist}$")

Entonces, las ecuaciones asociadas a este sistema de referencia quedan:

$$x)\ T.sen(\alpha) - f_i = 0 \qquad y)\ T.\cos(\alpha) - Peso = 0$$

Observación: visto desde adentro del camión, el péndulo se ve quieto, por lo tanto del lado derecho se usó que la aceleración es nula.

Despejo en ambas $\quad x)\ T.sen(\alpha) = m.2\,\frac{m}{s^2} \qquad y)\ T.\cos(\alpha) = m.10\,\frac{m}{s^2}$

Divido miembro a miembro:

$$\frac{\cancel{T}.sen(\alpha)}{\cancel{T}.\cos(\alpha)} = \frac{\cancel{m}.2\frac{m}{s^2}}{\cancel{m}.10\frac{m}{s^2}} \xrightarrow{simplif.} tg(\alpha) = \tfrac{1}{5} \xrightarrow{despejo} \alpha \approx 11{,}3°$$

b) En el caso en el cual se rompe la cuerda, al desaparecer la tensión nos quedan dos fuerzas (el peso y la fuerza inercial), las cuales provocan que el cuerpo caiga con aceleración en ambos ejes. Las ecuaciones vistas desde el sistema fijo al camión quedan:

$$x)\ -f_i = m.a'_x \qquad y)\ -Peso = m.a'_y$$

Despejando, el vector aceleración visto desde el camión será:

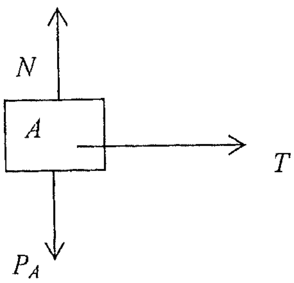
$$\bar{a} = -2\,\tfrac{m}{s^2}.\hat{i} - 10\,\tfrac{m}{s^2}.\hat{j}$$

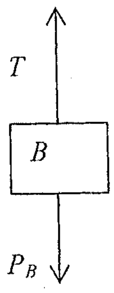
Como visto desde el camión el péndulo estaba quieto, entonces se mueve en forma rectilínea en el sentido de esta aceleración (como cualquier objeto que estando quieto, empieza a acelerar para algún lado, ¿OK?). Observar que el ángulo de la trayectoria de caída es el mismo de la situación inicial, es decir que se observaría lo que muestro en el dibujo.

Observación: muchos alumnos contestan que el péndulo tendría que hacer un tiro horizontal. Nada más equivocado. En ese caso la velocidad inicial debería ser horizontal (aquí no hay), y la aceleración ser perpendicular (o sea, hacia abajo, aquí en cambio también hay aceleración en el eje x hacia atrás)

35. En el sistema de la figura, el carrito se mueve inicialmente con velocidad V constante:
a) Si el rozamiento entre las masas y el carrito es despreciable, realice el DCL para cada cuerpo y determine la aceleración de cada uno.
b) Determine la fuerza de rozamiento necesaria para que A y B no deslicen. Considere igual μ para ambas superficies.
c) Si ahora el carrito se acelera ¿cuál es el valor de la aceleración máxima del carrito, para que el cuerpo A no deslice hacia atrás? Realizar desde un SRNI
d) ¿Cuál es el valor mínimo de aceleración del carrito para que el cuerpo B no caiga? Realice …

a) este caso es sencillo; visto desde arriba del carrito el problema es similar al visto desde tierra (el carro es un referencial inercial, porque se mueve a velocidad constante). Se tiene así que ambos cuerpos tienen aceleraciones iguales en módulo (A en el sentido "$+\hat{i}$", mientras que B en "$-\hat{j}$"). Los diagramas (como dijimos, tanto vistos desde el carrito como desde tierra son iguales) son los siguientes:





$$A: \begin{cases} \hat{i}: \ T = m_A.a \\ \hat{j}: \ N - P_A = 0 \end{cases}$$

$$B: \hat{j}: \ T - P_B = m_B.(-a)$$

Donde usé que $\vec{a}_A = +a.\hat{i}$ y $\vec{a}_B = -a.\hat{j}$ También podríamos haber recurrido a la técnica de los ejes solidarios para plantear al problema (es indistinto). De la ecuación del eje x para M_A, despejamos la Tensión, la reemplazamos en la ecuación de M_B:

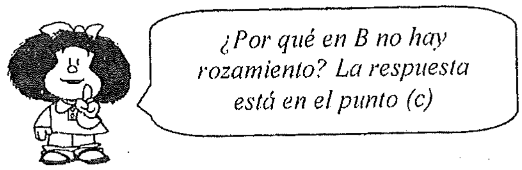
$$\overbrace{m_B.a}^{T} - P_B = -m_B.a \rightarrow m_B.a + m_A.a = P_B \xrightarrow{despejo} a = \frac{m_B.g}{(m_A + m_B)}$$

Este es el módulo de la aceleración (igual para los dos cuerpos), la dirección y sentido ya fueron aclarados en cada caso.

b) agreguemos la fuerza de rozamiento, suponiendo que el carro todavía avanza a velocidad constante, y que por lo tanto no existen fuerzas no inerciales. El diagrama es el mismo de antes, pero sobre A debo poner un rozamiento en el sentido "$-\hat{i}$". Además, tal como plantea el enunciado, vamos a poner que los cuerpos no deslicen respecto al carro, es decir que respecto a este referencial se vean "quietos":

$$A: \hat{i}) \quad T - Roz = \overbrace{m_A.a}^{=0}$$

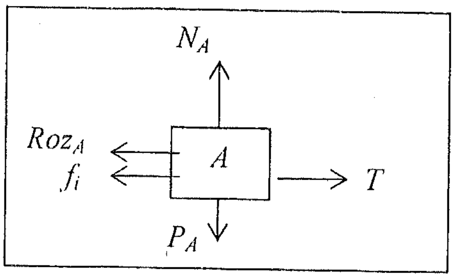
$$B: \hat{j}) \quad T - P_B = \overbrace{-m_B.a}^{=0}$$

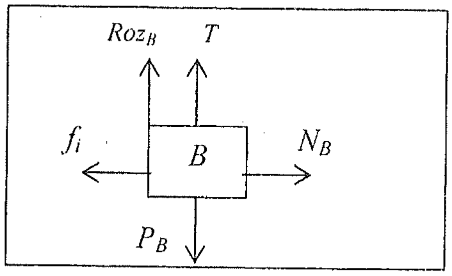


De la ecuación de B: $\quad T = P_B \xrightarrow{reemplazo \ en \ A} P_B - Roz = 0$

De aquí sale que el rozamiento que se necesita debe ser exactamente igual al peso de B

c) en este caso aparecen varias modificaciones. En primer lugar, esta vez el carro está acelerado, por lo tanto es un sistema de referencia no inercial y debo agregar las fuerzas ficticias (opuestas a la aceleración del referencial, es decir en el sentido "$-\hat{i}$"). Esto trae aparejado algunos cambios: para el cuerpo B aparece una fuerza horizontal hacia atrás y como B se encuentra en reposo visto desde este sistema, debe aparecer una fuerza hacia delante para mantener el equilibrio. Esa fuerza perpendicular a la cara del carrito es la Normal, y la aparición de ella permite que también ahora el B tenga rozamiento (como $Roz = \mu.N$, entonces sin Normal no hay rozamiento; respuesta a la pregunta b)





Desde el carrito, sigue viéndose que los cuerpos se mueven en forma solidaria, es decir lo que A tiene de aceleración en el sentido "$+\hat{i}$", el B lo tiene en "$-\hat{j}$". Pero en este caso queremos que los cuerpos no deslicen (a' vista desde el referencial "carrito" sea nula para ambos cuerpos). Como además se pretende que se plantee la situación en la cual A esté por salir hacia atrás (en consecuencia B esté por subir), los rozamientos que dibujamos en el diagrama anterior deben ser cambiados de sentido.

Es importante darse cuenta que esta situación corresponde al caso en que el referencial "carrito" tiene aceleraciones grandes. En efecto, para ese caso se tiene una f_i grande que tironea de A hacia atrás, y para mantener los cuerpos en reposo se requiere que los rozamientos sean opuestos a esa f_i. Las ecuaciones de la 2da ley para cada cuerpo nos quedan:

$$A: \begin{cases} \hat{i})\ Roz_A + T - f_{iA} = \overbrace{m_A.a_A}^{=0} \\ \hat{j})\ N_A - P_A = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} \hat{i})\ N_B - f_{iB} = 0 \\ \hat{j})\ T - Roz_B - P_B = \overbrace{m_B.a_B}^{=0} \end{cases}$$

Recordando que las fuerzas ficticias tienen el valor "$m.a_{ref}$", donde a_{ref} es la aceleración del carrito (la incógnita), podemos reemplazar y empezar por despejar las normales:

$$N_B = f_{iB} = m_B.a_{ref} \quad ; \qquad N_A = P_A = m_A.g$$

Con las otras dos ecuaciones despejamos la tensión:

$$T = -Roz_A + f_{iA} = -\mu.N_A + m_A.a_{ref} \qquad T = Roz_B + P_B = \mu.N_B + m_B.g$$

Igualo para eliminarla:

$$-\mu.N_A + m_A.a_{ref} = \mu.N_B + m_B.g \xrightarrow{\text{reemplazo las normales}}$$

$$-\mu.m_A.g + m_A.a_{ref} = \mu.m_B.a_{ref} + m_B.g \quad \rightarrow \quad (m_A - \mu.m_B).a_{ref} = m_B.g + \mu.m_A.g$$

$$\xrightarrow{\text{despejo}} \quad a_{ref} = \frac{m_B.g + \mu.m_A.g}{m_A - \mu.m_B}$$

Este valor es el máximo permitido para el carrito, sin que los cuerpos deslicen en sentido hacia atrás respecto de ese referencial.

Observación: en el caso que $m_A \approx \mu.m_B$, se tendrá que el referencial puede ir arbitrariamente acelerado (la aceleración del carrito podría tender a infinito e igual los cuerpos no deslizarían). Esto se debe a que para esa situación, si bien hay una f_i enorme tironeando de A hacia atrás, también se incrementa la Normal de B, y en consecuencia se incrementa el valor del rozamiento sobre este cuerpo que tiende a no dejarlo subir. Para el caso en que los valores del problema den que $m_A = \mu..m_B$, el incremento en la fuerza inercial es igual al incremento de la fuerza de rozamiento de B, y se cancelan siempre. Pensarlo bien, es interesante de entender.

d) en este caso tengo que resolver la situación en la cual el sistema de masas tiende a caer (sentido contrario al de (c)), es decir que se corresponde con los diagramas que realicé originalmente en aquel punto. Sólo debo cambiar de sentido los rozamientos, cambiando su signo en la 2da ley de Newton:

$$A: \begin{cases} \hat{\imath}) & -Roz_A + T - f_{iA} = 0 \\ \hat{\jmath}) & N_A - P_A = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} \hat{\imath}) & N_B - f_{iB} = 0 \\ \hat{\jmath}) & T - Roz_B - P_B = 0 \end{cases}$$

Es claro que los despejes de las normales son iguales, y resolviendo como en el anterior (basta cambiar los signos en los rozamientos, o más rápido aun, cambiarle el signo donde están los "μ" en la respuesta)

$$a_{\text{ref}} = \frac{m_B.g + \mu.m_A.g}{m_A + \mu.m_B}$$

Este es el valor mínimo para la aceleración del carrito, valores menores hacen que el B caiga.

e) Para resolver el último caso, eliminemos de las ecuaciones de Newton las fuerzas de rozamiento. Nos queda el sistema:

$$A: \hat{\imath}) \quad +T - f_{iA} = 0 \qquad B: \hat{\jmath}) \quad T - P_B = 0$$

Eliminando la tensión entre ambas ecuaciones, y usando la expresión de la fuerza ficticia, nos quedará:

$$P_B = f_{iA} \rightarrow m_B.g = m_A.a_{\text{ref}} \xrightarrow{\text{despejo}} a_{\text{ref}} = \frac{m_B.g}{m_A}$$

Este es el valor requerido para que los cuerpos no se muevan respecto al carrito cuando no hay rozamiento.

Prohibida su reproducción total o parcial bajo los alcances de la ley 11723